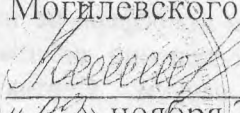


УТВЕРЖДАЮ

Начальник главного управления
по образованию
Могилевского облисполкома


А.Б.Заблоцкий
«20» ноября 2021 г.

ЗАДАНИЯ

для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Физика»

Дата проведения: 20 ноября 2021 г.

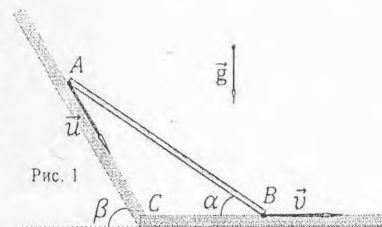
Время выполнения заданий: 10.00 – 15.00.

X класс

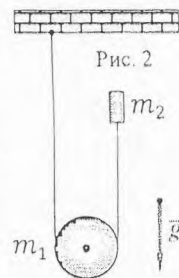
Справочные данные: ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, нормальное атмосферное давление $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, молярная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$; плотность воды $\rho_v = 1,00 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, объем конуса $V = \pi R^2 h/3$, $\pi = 3,14$.

Разрешается пользоваться инженерным калькулятором.

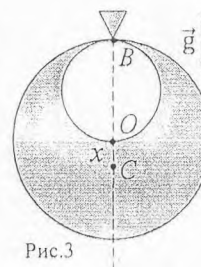
1. **«Жёсткое скольжение»** Жёсткий стержень AB (Рис. 1) скользит вниз вдоль наклонной стенки AC , образующей с горизонтом угол $\beta = 67^\circ$, опираясь на неё концом A . При этом конец B стержня движется по горизонтальной поверхности CB вправо. В момент, когда стержень образует с горизонтом угол $\alpha = 31^\circ$ (см. рис. 1), скорость \vec{v} конца B стержня имеет значение $v = 20 \text{ см/с}$. Найдите значение скорости \vec{u} конца A стержня в этот же момент времени.



2. **«Падающий блок»** Гладкий подвижный блок (Рис. 2) массой $m_1 = 0,10 \text{ кг}$ небольшого радиуса (можно считать, что его масса сосредоточена на оси) удерживают с помощью легкой нерастяжимой нити, один конец которой прикреплен к потолку, а второй – к телу массой $m_2 = 0,20 \text{ кг}$. В некоторый момент тело отпускают. Найдите ускорение a_1 блока, ускорение a_2 тела, а также силу T натяжения (упругости) нити при движении системы, пока тело не достигает блока.



3. **«Театральный номерок»** В однородном тонком диске массой $M = 15 \text{ г}$ и радиусом $R = 60 \text{ мм}$ вырезали круглое отверстие радиусом $r = R/2$ (Рис. 3). Диск с вырезом подвешен в точке B (точке касания окружностей, ограничивающих диск и отверстие) и может свободно качаться в плоскости рисунка. Какую работу A нужно совершить, чтобы медленно отклонить диск с вырезом от положения равновесия в плоскости рисунка на угол $\alpha = 64^\circ$? Используя полученный результат, найдите расстояние $x = OC$ от геометрического центра O диска (см. Рис. 3) до центра масс C системы.

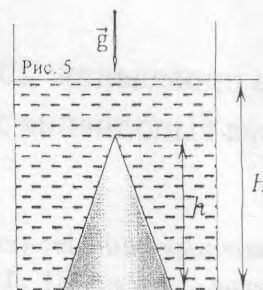


Ни пуха, ни пера!

4. «Жидкая атмосфера» Измерения показывают, что плотность земной атмосферы достаточно быстро нелинейно убывает с высотой от значения ρ_0 у поверхности Земли практически до нулевого значения. При этом атмосфера не имеет резкой границы раздела – воздух постепенно «исчезает», плавно переходя в космический вакуум. Считая воздух у поверхности Земли идеальным газом с молярной массой $M = 29,0$ г/моль, находящимся при нормальных условиях ($T = 273$ К, атмосферное давление – нормальное), найдите и вычислите значение ρ_0 . Принимая, что плотность воздуха, как и плотность жидкости, остается постоянной по всей высоте атмосферы $\rho(h) = \rho_0$, оцените в рамках этой модели высоту h_{\max} атмосферы Земли (Рис. 4), а также её массу m . Радиус Земли $R = 6,38 \cdot 10^6$ м. Изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.



5. «Анти-Архимед» На дно гладкого горизонтального сосуда поставили тщательно отполированный конус (Рис. 5) высотой $h = 12,1$ см и площадью основания $S = 63,9$ см². Затем сосуд аккуратно заполнили водой до уровня $H = 91,2$ см, так, что вода под конус не подтекает. С какой силой вода давит на боковую поверхность конуса? Куда направлена эта сила? Атмосферное давление нормальное.



10-1. «Жёсткое скольжение» Поскольку стержень AB жёсткий (недеформируемый), то в процессе его произвольного движения (например, скольжения по поверхностям) расстояние между любыми точками стержня не может измениться.

Согласно «закону палочки» (см. решение задачи 9-2), проекции скоростей \vec{u} и \vec{v} «на стержень» (Рис. 6) должны быть одинаковы

$$u \cos \gamma = v \cos \alpha. \quad (1)$$

По теореме о внешнем угле треугольника можем записать

$$\alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \gamma = \beta - \alpha. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$u \cos(\beta - \alpha) = v \cos \alpha. \quad (3)$$

Из (3) получаем искомое значение для скорости u конца A стержня

$$u = \frac{\cos \alpha}{\cos(\beta - \alpha)} v. \quad (4)$$

Расчет по формуле (4) даёт

$$u = \frac{20 \cdot \cos 31^\circ}{\cos(67^\circ - 31^\circ)} \cdot \frac{\text{см}}{\text{с}} = 21,19 \text{ см/с}. \quad (5)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

10-2. «Падающий блок» Поскольку по условию нить легкая, то можно считать, что сила её натяжения (упругости) слева и справа от блока (Рис. 7) одинакова и равна \vec{T} .

Запишем в проекции на вертикаль второй закон Ньютона для движения блока массой m_1 вниз с ускорением a_1 под действием силы тяжести $m_1 \vec{g}$ (направлена вниз) и двух сил натяжения нитей $2\vec{T}$ (направлены вверх)

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2T. \quad (1)$$

Аналогичное уравнение запишем для движения тела массой m_2 вниз с ускорением a_2

$$m_2 a_2 = m_2 g + T. \quad (2)$$

Поскольку нить нерастяжима, то за одно и то же время тело проходит вниз расстояние в два раза большее, чем подвижный блок. Следовательно, ускорение a_2 тела в два раза больше ускорения a_1 блока

$$a_2 = 2a_1. \quad (3)$$

Решая систему (1) – (3), находим:

$$a_1 = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + 4m_2} g, \quad (4)$$

$$a_2 = \frac{2(m_1 + 2m_2)}{m_1 + 4m_2} g, \quad (5)$$

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + 4m_2} g. \quad (6)$$

В нашем случае получаем

$$a_1 = \frac{5}{9} g = \{5,45\} = 5,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (7)$$

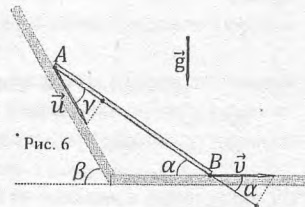


Рис. 6

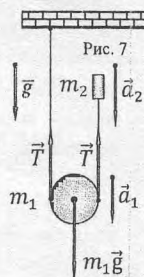


Рис. 7

Второй (районный) этап Республиканской олимпиады школьников по физике (2021 г.)

$$a_2 = \frac{10}{9}g = \{10,9\} = 11 \frac{m}{c^2}. \quad (8)$$

$$T = \frac{0,10 \cdot 0,20}{0,10 + 4 \cdot 0,20} 9,81 (H) = \{0,218\} = 0,22 H. \quad (9)$$

Интересно, что ускорение a_2 тела оказалось больше ускорения свободного падения! Но поскольку нить натянута ($T > 0$), то её действие приводит к дополнительному разгону тела, так что это всё «по закону»...

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) окончательный ответ приводим с точностью до двух значащих цифр.

10-3. «Театральный номер» Поскольку центр масс диска без выреза находится в его геометрическом центре O , то при отклонении диска массой M и радиусом R на угол α от вертикали будет совершена работа A_1 , равная увеличению его потенциальной энергии (как если бы вся масса была сосредоточена в центре диска)

$$A_1 = \Delta E_{\text{п}} = MgR(1 - \cos \alpha). \quad (1)$$

Так как радиус вырезанного диска ($r = R/2$) в два раза меньше радиуса большого диска, то его масса m (масса пропорциональна площади!) будет в четыре раза меньше массы большого диска и равна $m = \frac{M}{4}$.

Соответственно, при отклонении диска с вырезом (Рис. 8) на некоторый угол α от вертикали в плоскости рисунка из (1) следует вычесть работу A_2 по отклонению малого диска

$$A_2 = mgr(1 - \cos \alpha) = \frac{M}{4} g \frac{R}{2} (1 - \cos \alpha) \quad (2)$$

на тот же угол.

Тогда искомая работа по отклонению диска с вырезом будет равна

$$A = A_1 - A_2 = \frac{7}{8} MgR(1 - \cos \alpha). \quad (3)$$

Расчет по формуле (3) для приведенных параметров даёт

$$A = \frac{7}{8} \cdot 0,015 \cdot 9,81 \cdot 0,060 \cdot (1 - \cos 64^\circ) (\text{Дж}) = \{4,338793502 \cdot 10^{-3}\} = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 4,3 \text{ мДж}. \quad (4)$$

С другой стороны данную работу A можно представить как подъем на некоторую высоту центра масс C системы, следовательно, для этого случая можем записать

$$\frac{7}{8} MgR(1 - \cos \alpha) = \frac{3}{4} Mg(R + x)(1 - \cos \alpha), \quad (5)$$

где x – искомое расстояние до центра масс диска с вырезом.

Из (5) находим искомое расстояние до центра масс

$$x = \frac{R}{6} = 10 \text{ мм}. \quad (6)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия) все окончательные ответы приводим с точностью до двух значащих цифр.

10-4. «Жидкая атмосфера» Используя уравнение состояния идеального газа в форме Клапейрона–Менделеева, выразим плотность газа у поверхности Земли

$$pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}, \quad (1)$$

где M – молярная (усредненная) масса воздуха.

Используя данные условия и справочные данные (при нормальных условиях $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}$, $T = 273 \text{ К}$) получим численное значение

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT} = \frac{1,01 \cdot 10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{8,31 \cdot 273 \text{ м}^3} = \{1,291087573\} = 1,29 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (2)$$

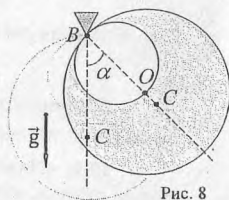


Рис. 8

Как следует из (2), «куб» воздуха у поверхности Земли «весит» немного больше килограмма (без силы Архимеда), т.е. его легко поднимет даже ребенок (сравните с кубом воды, который весит тонну!).

В рамках модели «Жидкая атмосфера» мы считаем плотность воздуха постоянной по высоте атмосферы, как у жидкости. Поскольку жидкости практически «несжимаемы», то обычно считается, что их плотность ρ не изменяется ($\rho = \text{const}$) при погружении на различные глубины h .

В рамках такой модели давление $p(h)$ жидкости на глубине h вычисляется по формуле линейной зависимости

$$p(h) = p_0 + \rho gh, \quad (3)$$

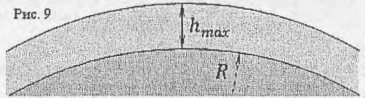
где p_0 – атмосферное давление у поверхности жидкости, g – ускорение свободного падения.

Подчеркнем, что в отличие от жидкостей, газы хорошо сжимаемы, поэтому их плотность $p(h)$ на различных глубинах различна (зависит от давления)

$$p(h) \neq \text{const}, \quad (4)$$

что приводит к более сложной (экспоненциальной) зависимости давления в газе от глубины погружения (подъема над начальным уровнем).

В рамках упрощенной «жидкой» модели газовой атмосферы Земли будем считать, что на некоторой высоте h_{max} она образует границу раздела (Рис. 9), где плотность газа «скачком» переходит в нулевое значение, образуя «космический вакуум».



Учитывая, что давление p_0 межзвездного газа («космического вакуума») практически равно нулю ($p_0 = 0$ Па), из (3) получаем, что в рамках данной модели давление газа линейно увеличивается с «глубиной погружения» h , отмеряемой от её воображаемой границы h_{max} с «космическим вакуумом»

$$p(h) = \rho gh. \quad (5)$$

Из (5) следует, что в рамках рассматриваемой модели при подъеме вверх от поверхности Земли на высоту h , давление газа линейно падает по закону

$$p(h) = p_0 - \rho gh, \quad (6)$$

где p_0 – нормальное атмосферное давление у поверхности Земли, ρ – плотность земной атмосферы у поверхности Земли (и везде!), g – ускорение свободного падения у поверхности Земли (и везде!).

Высоту атмосферы h_{max} найдем из условия равенства нулю давления газа на её границе

$$0 = p_0 - \rho_0 g h_{\text{max}} \Rightarrow h_{\text{max}} = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \frac{1,01 \cdot 10^5}{1,29 \cdot 9,81} \text{ м} = \{7981,098231\} = 7,98 \cdot 10^3 \text{ м} = 7,98 \text{ км}. \quad (7)$$

Как видим из (7), значение h_{max} в рамках данной модели сильно занижено (высота атмосферы ≈ 200 км), поскольку даже пассажирские самолеты достаточно «спокойно» летают на высотах порядка ≈ 10 км.

Тогда масса земной атмосферы равна произведению плотности на объём $V = S \cdot h_{\text{max}}$ достаточно тонкого (по сравнению с радиусом Земли) слоя воздуха

$$m = \rho V = \frac{p_0 M}{RT} 4\pi R^2 h_{\text{max}} = \frac{4\pi R^2 p_0}{g} = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot (6,38 \cdot 10^6)^2 \cdot 1,01 \cdot 10^5}{9,81} \text{ кг} = \{5,263605878 \cdot 10^{18}\} = 5,26 \cdot 10^{18} \text{ кг}. \quad (8)$$

Поскольку по современным данным масса атмосферы Земли равна

$$m = 5,20 \cdot 10^{18} \text{ кг}, \quad (9)$$

Второй (районный) этап Республиканской олимпиады школьников по физике (2021 г.)

то «погрешность» (отклонение) нашей оценки от «истинного» значения составила всего лишь $\varepsilon = 1,2\%$!!!

Удивительно, но факт: такая простая модель воздушной атмосферы, как «Жидкая атмосфера», позволяет практически точно оценить массу воздушной оболочки Земли, правда значительно «ошибаясь» при этом в оценке её высоты h_{max} .

Разгадка всех этих «фокусов» кроется в свойствах экспоненциальной функции ($y(x) = e^x$), которые Вы изучите совсем скоро – в 11 классе! ☺

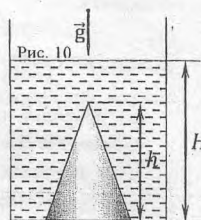
10-5. «Анти-Архимед» Классическая формула для выталкивающей силы Архимеда

$$F_A = \rho_b g V \quad (1)$$

справедлива в том случае, если жидкость плотности ρ_b «окружает» тело со всех сторон или оказывает на тело силу давления «снизу», направленную вверх.

Поскольку, согласно условию, в данном случае вода под конус не подтекает (Рис. 10), то это условие нарушено, т.е. нет силы давления F_1 жидкости, направленной вверх. Следовательно, использовать формулу (1) в данном случае нельзя.

Проще говоря, из-за этого, сила Архимеда в данном случае является не «выталкивающей», направленной «вверх», а «заталкивающей», т.е. направленной «вниз», прижимающей конус ко дну.



Действительно, классическая выталкивающая сила Архимеда возникает вследствие того, что сила давления жидкости снизу больше, чем сила давления той же жидкости сверху. В нашем же случае (доннышко сухое) нижней силы давления воды просто нет, а вот сила давления жидкости сверху по-прежнему действует.

Для решения задачи рассмотрим равновесие конуса из воды таких же размеров, слегка приподнятого над дном (метод Паскаля).

Так как жидкость «сама в себе» находится в равновесии, то для суммы сил, действующих на нее, можем записать

$$mg = F_1 - F_1, \quad (2)$$

где m – масса жидкости, F_1 – сила давления жидкости вверх (на дно конуса), F_1 – искомая сила давления жидкости вниз (на боковую поверхность конуса).

Вверх конус толкает сила давления воды на его основание

$$F_1 = p \cdot S = (p_0 + \rho_b g H) \pi R^2. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим

$$F_1 = F_1 - mg = (p_0 + \rho_b g H) \pi R^2 - \frac{\rho_b \pi R^2 h}{3} g = (p_0 + \rho_b g (H - h/3)) S. \quad (4)$$

Таким образом, сила, действующая на боковую поверхность конуса, направлена вниз и равна

$$F_1 = (p_0 + \rho_b g (H - h/3)) S. \quad (5)$$

Расчет по формуле (4) дает

$$F_1 = \left((1,01 \cdot 10^5 + 1,00 \cdot 10^3 \cdot 9,81 \cdot (91,2 - \frac{12,1}{3}) \cdot 10^{-2}) \cdot 63,9 \cdot 10^{-4} \right) (\text{Н}) = \{700,0312095\} = 700 \text{ Н}. \quad (6)$$

В соответствии с правилами округления (см. данные условия и справочные данные) все окончательные ответы приводим с точностью до трех значащих цифр.